*Национальный исследовательский университет ИТМО*

**Лабораторная работа №3**

Выполнили студенты:

Чайков Артемий M32031

Демин Вадим M32021

Гусев Дмитрий M32021

2021

1)

Найдено LU разложение с помощью метода Гаусса. Аналогично посчитана обратная матрица через LU. Решение СЛАУ через метод Гаусса.

2)

Работает, проверяем по пункту 4

3)

Написан метод Якоби

Достаточный признак сходимости данного метода - матрица должна быть с диагональным преобладанием. Таким образом коэффициент данного xi должен быть больше суммы коэффициентов остальных неизвестных.

Для больших k метод Якоби требует либо заметно большее время исполнения, либо же при реализации метода с постоянным количеством проходов, выдает неточные результаты.

Также метод Якоби расходится на матрицах Гильберта, что логично, т.к. они не являются матрицами с диагональным преобладанием.

Далее приведены значения числа проходов. Изначально(первые 3 измерения) Якоби был написан без ограничения числа заходов в цикл, а условием выхода было достижение необходимой точности(которое было 10^-k), однако, т.к. количество итераций очень быстро росло, для 100, 500 и 1000 уже использовался Якоби с точным числом итераций, из-за чего упала точность.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Матрица с Диагональным преобладанием | | | погрешность |
| n | k | iterations |  |
| 10 | 1 | 39100 | 0,04958075549217114 |
| 50 | 1 | 5655000 | 0,04997370953328045 |
| 100 | 1 | 45320000 | 0,049980548654334156 |
| 500 | 1 | 25000000 | 0,49522815357472694 |
| 1000 | 1 | 50000000 | 0,4992686112794018 |

Также число операций Якоби зависит от k, т.к. плохая обусловленность матрицы делает меньше шаг алгоритма => возрастает число итераций.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| n\k | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 3 | 117 | 441 | 7425 | 35676 | 771309 | 11964654 |

4)

Метода Гаусса

a) Матрица с диагональным доминированием

Собрана матрица значений количества итераций при разных n и k (n – размерность матрицы, k – степень для 10^-k которая прибавляется к Значениям на диагонали)

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| n\k | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 10 | 90 | 90 | 90 | 90 | 90 | 90 | 90 | 90 | 90 |
| 50 | 2450 | 2450 | 2450 | 2450 | 2450 | 2450 | 2450 | 2450 | 2450 |
| 100 | 9900 | 9900 | 9900 | 9900 | 9900 | 9900 | 9900 | 9900 | 9900 |
| 500 | 249500 | 249500 | 249500 | 249500 | 249500 | 249500 | 249500 | 249500 | 249500 |
| 1000 | 999000 | 999000 | 999000 | 999000 | 999000 | 999000 | 999000 | 999000 | 999000 |

Как видно из таблицы, для метода Гаусса значение k не влияет на количество итераций. Количество итераций получается равным n^2-n

Таблица со значениями погрешности при разных n и k

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| n\k | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 10 | 1,78E-15 | 1,78E-15 | 1,78E-15 | 1,78E-15 | 1,78E-15 | 1,78E-15 | 3,55E-15 | 3,55E-15 | 1,78E-15 |
| 50 | 1,42E-14 | 2,13E-14 | 1,42E-14 | 1,07E-14 | 1,42E-14 | 1,42E-14 | 1,07E-14 | 1,42E-14 | 1,42E-14 |
| 100 | 4,26E-14 | 4,26E-14 | 3,55E-14 | 3,55E-14 | 3,55E-14 | 3,55E-14 | 2,84E-14 | 4,26E-14 | 4,26E-14 |
| 500 | 4,83E-13 | 5,68E-13 | 5,68E-13 | 3,98E-13 | 4,83E-13 | 4,83E-13 | 3,98E-13 | 4,83E-13 | 5,68E-13 |
| 1000 | 1,19E-12 | 1,02E-12 | 1,19E-12 | 1,02E-12 | 1,25E-12 | 1,19E-12 | 1,25E-12 | 1,02E-12 | 1,25E-12 |

Из таблицы видно, что для метода Гаусса погрешность зависит от n и не зависит от k

5)

Метод Гаусса

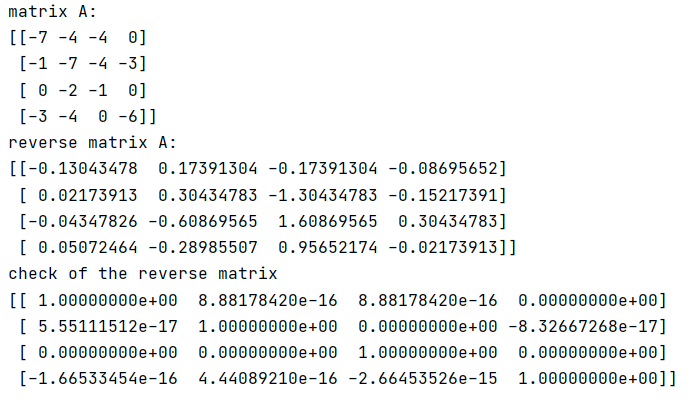
|  |  |
| --- | --- |
| n | iterations |
| 10 | 90 |
| 50 | 2450 |
| 100 | 9900 |
| 500 | 249500 |
| 1000 | 999000 |

значения совпадают со значениями для матрицы с диагональным доминированием

6)

7) Реализовать поиск обратной матрицы через LU разложение

Обратная матрица получается высчитыванием обратной матрицы сначала для L, а потом для U и последующее их перемножение. Это получается выгодно так как достаточно легко посчитать обратную матрицу для верхней и нижней треугольной матрицы.



Теоретические вопросы:

1. Разреженно-строчный/разреженно-столбцовый форматы хранения матриц. Способы перевода из плотной в разреженную и наоборот.

При переводе в разреженно-строчный форматы хранения матрицы заполняем массив data и indices, для этого идём по плотной матрице построчно записывая не нулевые элементы в data и indices, после прохождения строки записываем в indptr сколько ненулевых чисел было в строке

1. Особенности использования разреженных матриц в языке Python

Мы использовали библиотеку csr\_matrix а которой реализовано объединение трёх массивов data, indices и indptr для получения матрицы. Также с помощью него можно обращаться к элементу матрицы как у плотной матрицы, то есть A[i, j] выдаст элемент на строке i и в столбце j. При выводе print используется метод .toarray() для вывода матрицы в удобном для чтения виде

1. Вычисление обратной матрицы с использованием разложений

Обратная матрица получается высчитыванием обратной матрицы сначала для L, а потом для U и последующее их перемножение. Это получается выгодно так как достаточно легко посчитать обратную матрицу для верхней и нижней треугольной матрицы.

1. Типы матриц и их хранение

Существуют несколько видов матриц - плотные, разреженные, симметричные. Разреженные и симметричные матрицы невыгодно хранить в стандартном виде, т.е. в виде двумерного массива, поэтому есть несколько способов для хранения этих видов матриц. Разреженно-строчный и разреженно-столбцовый форматы используются для хранения ненулевых элементов, используя 3 одномерных массива - data, indices, indptr.

1. Итерационные методы и особенности их применения

Методы итеративно находят решение вне зависимости от изначального приближения, позволяют работать на нелинейных системах, однако взамен требует, чтобы матрица была диагонально преобладающей, а также, чтобы корни по модулю были меньше 1, а также, работает крайне медленно, используя большое число итераций, либо же с большой погрешностью.

1. Устойчивость и сходимость итерационных методов

Метод якоби сходится, если матрица обладает диагональным преобладанием, а также все корни по модулю меньше 1. Некоторые численные алгоритмы могут ослаблять небольшие отклонения (ошибки) во входных данных; другие могут увеличить такие ошибки. Расчеты, которые, как можно доказать, не увеличивают ошибки аппроксимации, называются вычислительно устойчивыми, следовательно метод Якоби можно назвать вычислительно устойчивым.

**Выводы:**

1. Мы нашли LU разложение матрицы, сама матрица хранится в разреженно-строчном виде. Таким образом для решения уравнения методом Гаусса, потребовалось сначала решить уравнение L \* y = B, а уже после U \* x = y.
2. Выше приведена таблица с результатами вычислений при разных входных параметрах, можно сделать вывод, что при хорошей обусловленности метод Гаусса дает очень маленькую погрешность.
3. Метод Якоби работает только на матрицах с доминирующей диагональю, соответственно для матрицы Гильберта данный метод расходится, что и подтверждают тесты. Также при больших k(плохо обусловленных матрицах), алгоритм слишком медленно сходится, из-за чего долго работает. При этом метод асимптотически не зависит от изначального приближения.
4. Асимптотика алгоритма Гаусса - n^2. При увеличении размерности самой матрицы, будет расти число итераций, что приведет к накоплению ошибки, поэтому использование метода Гаусса на больших размерностях будет давать большие погрешности.